

p.10-55

【問1】 「10, 11」のように2つの連続する2ケタの整数を、それぞれ2乗して足し合わせた数のうち、一の位が3となるのは70以下の数字にいくつあるか。【国税専門24年度】
17_5*

1 12 2 14 3 16 4 18 5 20

【解説】 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 までの連続する数字をそれぞれ2乗した一の位は、
1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1 である。2つの数字を足し合わせて3になるのは、
4, 9と、9, 4の二つである。これは、11から19までに2個あることを示す。
すると、10から70までは、6倍するから12個ある。

【問2】 ある自然数に対して5で割る操作を繰り返す。5で割り切れるときは商を改めて対象とし、5で割り切れないときは1を引いた数を改めて対象として同じ操作を繰り返す。このようにして結果が0になったところで操作を終了する。たとえば、2と5はともに2回で操作が完了する。では、操作がちょうど4回で終了する数はいくつあるか。 【市役所12年度】18_6**

1 8 2 9 3 10 4 11 5 12

【解説】 問題をよく読み、理解して例を検討する。2は2回で操作が完了する、すなわち0になる。2は5で割り切れないから→1 ①, 1は5で割り切れないから→0 ②
5は5で割り切れるから商は1 ①, 1は5で割り切れないから→0 ②
2も5も1になってから0になっている。

4回目で0になるには、3回目が1であることが必要である。2回目は2又は5である。1回目は、割り切れずに1を引く3, 又は割切れて2になる10がある。更に、割り切れずに1を引いて5になる6, と割切れて5になる25がある。

そして、最初の0回目は、1を引いて3, 10, 6, 25になるものと、5で割って3, 10, 6, 25になるものの8個がある。

すなわち、4, 11, 7, 26と、15, 50, 30, 125である。

【問3】 $17^{13}+13^{27}$ の一の位の数として正しいものは、次のうちどれか。【市役所14年度】
16_1*

1 0 2 2 3 4 4 6 5 8

【解説】 一の位だけを問題にする場合、他の位は無視できる。一の位だけ考えた指数の性質を理解する。 $7 \times 7 = 7^2 = 49 \Rightarrow 9$, $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4 = 81 \Rightarrow 1$, $(7^4)^2 = 7^8 = 1$
 $17^{13} + 13^{27} = 7^{13} + 3^{27} = 7^{4 \times 3} \times 7^1 + 3^{4 \times 6} \times 3^3 = 7 + 27 = 4$

★指数法則は、テキスト15ページ★

【問4】 500以下の自然数のうち、3で割ると1余り、かつ、7で割ると3余る数は何個あるか。 (国Ⅱ23年度)46_0

1 18個 2 20個 3 22個 4 24個 5 26個

【解説】 地道に数える。3で割ると1余るのは、4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, この数字は、3の倍数に1を加えたものである。7で割ると3余る数字は、7の倍数に3を足したもので、10, 17, 24, 31, となり、7と3の最小公倍数21の倍数で共通することが分かるから、 $500 \div 21 = 23 + \alpha$ 23個であるが最初の10を加え24個となる。

【問5】 a, b, c は1~10のうちの異なる自然数である。 $a \times b$ は12の倍数であるが36の倍数でなく、 $a \times c$ は5の倍数で、 $b \times c$ は27の倍数である。このとき、 $a + b + c$ の値として正しいものはどれか。【地上18年度】 38_2*

- 1 19 2 21 3 23 4 25 5 27

【解説】 a, b, c は最大で、8, 9, 10の組であり、乗算の最大は90だから、90までの各乗算の当てはまる数字を描き出す。

$a \times b$ が12の倍数だから12, 24, 36, 48, 60, 72, 84であるが、36の倍数ではない条件から、36と72が消える。 $a \times c$ は5の倍数だから、5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90が該当する。

そして3番目の条件である $b \times c$ は27の倍数から、27, 54, 81が得られる。

3番目の条件が候補となる数が少ないのでこれを検討する。81は 9×9 以外はないので異なる数の条件を満たさない。

そして、27 (3, 9), 54 (6, 9) だけである。どちらとも9が含まれるので b か c のどちらかが9である。 b が9と仮定し、 $a \times b$ の候補をみると36, 72が消えているので該当する候補はない。ゆえに c が9である。

$a \times c$ が5の倍数で c が5であるから、 a の候補は45の9と90の10である。 a を9又は10とした場合の b を $a \times b$ の候補12, 24, 48, 60, 84から探すと、60のみであるから、 a は10, b は6が得られる。

【問6】 A~Dの4人が、100点満点の試験を受けた。4人の得点について、次のことが分かっているとき、Aの得点とBの得点を足し合わせた得点はどれか。ただし、試験の得点はすべて整数とし、0点の者はいないものとする。【国家専門25年度】 39_4*

Aの得点は、Bの得点の $\frac{5}{7}$ 倍であった。

Bの得点は、Cの得点の $\frac{5}{3}$ 倍であった。

Cの得点は、Dの得点の2倍であった。

- 1 96点 2 120点 3 136点 4 144点 5 160点

【解説】 1番目の条件から、 $A = \frac{5}{7}B$ ① これからBは7の倍数である。

また、 $B = \frac{7}{5}A$ とも表せるから、Aの得点は5の倍数である。

2番目の条件から $B = \frac{5}{3}C$ ② これからBは5の倍数でもある。よって、Bは5と7の

両者の倍数だから35の倍数で、35点と70点が候補となる。

Bが35点の場合と70点の場合について、条件に当てはめる。Bが35点では、Aは25点、

Cは②式を変形し、 $C = \frac{3}{5}B$ から、 $C = 21$ となるが、3番目の条件であるCが偶数である条件を満たさない。Bが70点の場合は、Cは42点、Aは①式から50点となる。

【問7】 6で割ると3余り，7で割ると4余り，8で割ると5余る自然数のうち，最も小さい数の各位の数字の和はどれか。 【地上21年度】50_1* ‘

- 1 9 2 12 3 18 4 24 5 30

【解説】 数字を当てはめて規則性を見出して共通する数字を推理する手段もあるが，条件をよく見て，余るならばいくつ足りないかを考える。条件の全てが3足りないことが分ければ，割り切れると考えて共通の数字から3を引けばよいこととなる。すなわち，6，7，8の最小公倍数を求めると，168が得られ，これから3を減算し165を得る。これが正しいか否かは，計算してみればよい。 ★最小公倍数の求め方は，テキスト9ページ★

【問8】 ある町にはA寺，B寺という2つの寺があり，大晦日の夜12時ちょうどからどちらの寺も除夜の鐘をつき始める。A寺の鐘は30秒に1回，B寺の鐘は40秒に1回鳴るが，このとき，B寺の鐘が108回鳴る間に除夜の鐘は何回聞こえることになるか。ただし，除夜の鐘はそれぞれ108回つくものであり，2つの寺の鐘が同時に鳴るときは1回と数えるものとする。 【市役所15年度】39_5**

- 1 181回 2 183回 3 185回 4 187回 5 189回

【解説】 それぞれの寺が108回つくから両者で216回であるが，重なって鳴る回は，2回カウントしているので重なり回数を減算することが必要である。

30秒と40秒の最小公倍数である120秒ごとに同時に鳴り，30秒の鐘は4の倍数の回に1回重なって鳴るから， $108 \div 4 = 27$ が同時に聞こえる。よって $108 \times 2 - 27 = 189$